دیفرانسیل

به زبون آدمیزاد 2

هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد

NANO LEARN

NanoAmouz

برای دانلود جدیدترین نسخه این جزوه، روی نماد نانولرن لمس کن

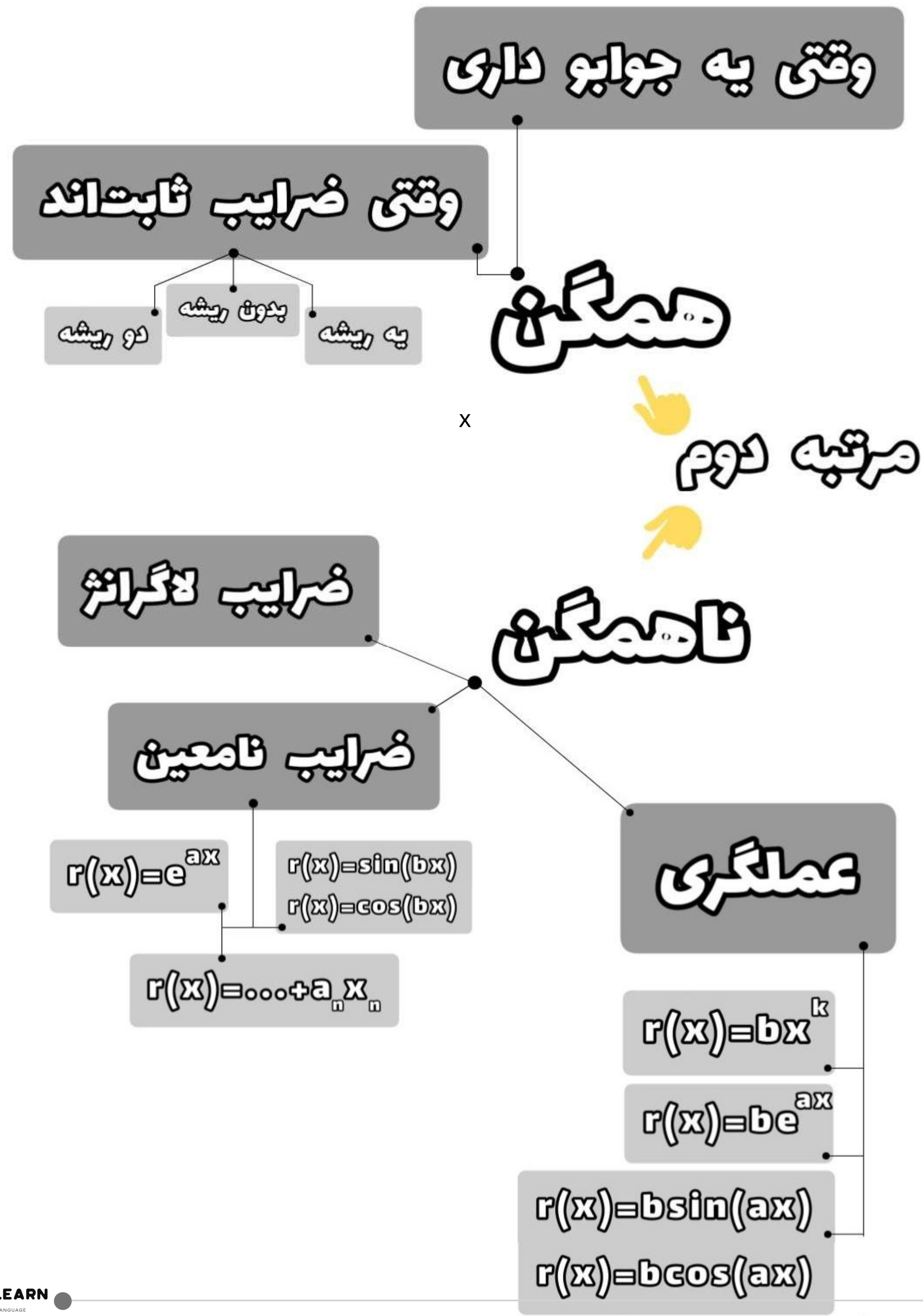
مهندس مجتبی احمدی

چجوری معادلات مرتبه دوم رو حل کنیم؟

تیپ کلی شون اینجوریه $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

اگه r(x)=0 بهش میگیم همگن (یعنی طرف راست صفر بشه)؛ اگه صفر نباشه، میشه ناهمگن، فقط رفیق، همگن ها معمولا بهت دو تا جواب میدن که قیافه جواب این شکلی میشه : $Y=C_1y_1+C_2y_2$

یعنی دو تا y که گیر میاری رو با دوتا ضریب c مینویسی که میشه جواب (چون c ها هر عددی میتونن باشن و جواب درسته)



حالا میریم دونه دونه به زبون ساده باهم ببینیم اینا چی هستن؟

معادلات همگن | وقتی یه جوابو داری

اگه یادت بیاد مرتبه دوم ها کلا دوتا y بهمون میدن ،اگه یکیشو بهت بده میتونی اون یکی رو اینجوری گیر بیاری $Y_2 = VY_1$ و $V = \int \left(\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y^2}\right) dx$ (مخرج همونیه که سوال داده بهت 😋)

مثلا) **اگه $y = x$ یه جواب معادله $x^2y'' + xy' - y = 0$ باشه، جواب کلی رو به دست بیار.**

حل) معادله مرتبه دو هستش و یه جواب رو داده؛ هول نکن، اولا استاندارد کن بعد حل کن

خب این الان شد V

$$Y_2 = VY_1 \quad , \quad V = \int \left(\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y^2}\right) dx \rightarrow = \int \left(\frac{e^{-\int \left(\frac{1}{x}\right) dx}}{x^2}\right) dx \rightarrow \int \frac{1}{x^3} dx \rightarrow -\frac{1}{2x^3}$$

$$Y_2 = \left(-\frac{1}{2x^3}\right)(x) = -\frac{1}{2x}$$

جواب نهایی, $\rightarrow Y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow Y(x) = c_1 x + c_2 \left(\frac{-1}{2x}\right)$

معادلات همگن | ضرایب ثابت

این حالتیه که هیچ جوابی بهت نداده (مثل قبلی) ولی ضریب ها فقط عدد اند؛ اینجا فقط کافیه مرتبه مشتق رو با توان جایگزین کنی، مثلا مشتق دوم رو توان دوم یه عبارت در متغیر مینویسی، و ادامه ماجرا 👇

مثل این $y'' = m^2$ و معادله درجه دو رو حل میکنیم (به روش دلتا)

$\Delta > 0$ دو ریشه r_1 و r_2 داره

$y_1 = e^{r_1 x}$

$y_2 = e^{r_2 x}$

در حالت دلتا صفر، ریشه دوم با همون حالتی به دست میاد که گفتیم "وقتی یه جوابو داری"

$\Delta = 0$ یه ریشه (r_1) داره

ریشه دوم با فرمول V گیر میاد

$y_1 = e^{r_1 x}$

در حالت دلتا صفر هم دو تا جواب داری ولی به این شکلی که اینجا گفتم برات...

$\Delta < 0$ دو ریشه r_1 و r_2 داره که به صورت $a \pm bi$ نوشته میشه

$y_1 = e^{ax}\cos(bx)$

$y_2 = e^{ax}\sin(bx)$

فعلا این دم و دستگاه رو ول کن برو مثال های پایین رو ببین، بعدش اینارو میفهمی...

مثلا) **برو تو کف این معادله $y'' + y' - 6y = 0$**

می‌بینی که جوابی بهمون نداده و از اونور ضرایب y ها ثابت اند (یعنی عدد اند دیگه حاجی)

$$y'' + y' - 6y = 0 \rightarrow m^2 + m - 6 = 0 \text{ — Delta} \rightarrow m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \rightarrow m_1 = -3 \,, m_2 = 2$$

$$y_1 = e^{-3x} \ , \qquad y_2 = e^{2x} \ \rightarrow \ Y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \rightarrow \ Y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

دقت کردی که دلتا مثبت شد و دو تا ریشه داد و از روش اول رفتیم جلو و جواب هلو بپر تو هلو به دست اومد...

فقط اگه ریشه گیری به روش دلتا یادت رفته به جای لاس زدن، برو یه دور بخونش...

مثلا) معادله $y'' + 2y' + y = 0$ رو حل کن.

$$y'' + 2y' + y + 0 \ \rightarrow \ m^2 + 2m + 1 = 0 \quad \xrightarrow{Delta} \quad \Delta = 0 \,, m = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y_1 = e^{-x} \rightarrow \ y_2 = V y_1 \ , \qquad V = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = \int \frac{e^{-\int 2dx}}{e^{-2x}} dx = \int \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}} dx = \int 1 dx = x$$

$$y_2 = V y_1 = x e^{-x} \rightarrow \ Y(x) = c_1 y_1 + c_1 y_2 \rightarrow \ c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

پس چون دلتا صفر شد معادله یک جواب داشت و اون یکی جوابش رو با روش قبلی حساب کردیم (همون که یک جواب رو بهت میداد و با $y_2 = V y_1$ حساب میکردیم.)

مثلا) آویزون این معادله شو $y'' + 8 = 0$

$$y'' + 8 = 0 \ \rightarrow \ m^2 + 8 = 0 \ -Delta \rightarrow \ m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm 4\sqrt{2}i}{2} = \pm 2\sqrt{2}\, i \ \ (a + bi) \rightarrow \ a = 0 \,, b = \pm 2\sqrt{2}$$

خب این دلتا چجوری این طوری شد : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-32} = \sqrt{-1}\,\sqrt{32} = 4\sqrt{2}i$ خب میدونی رادیکال منفی یک میشه (اینو در اعداد موهومی در ریاضی یاد میگیری)

اینم یادت باشه که ما وقتی b رو گیر آوردیم اون مثبته رو برمیداریم و با منفیه کاری نداریم.

$$y_1 = e^{ax} cosbx \rightarrow \ e^{(0)x} \cos 2\sqrt{2}x = \ \cos 2\sqrt{2}x$$

$$y_2 = e^{ax} sinbx = e^{(0)x} sin 2\sqrt{2}x = \ sin 2\sqrt{2}x$$

$$Y(x) = c_1 y_1 + c_1 y_2 \rightarrow \ c_1 \cos\left(2\sqrt{2}x\right) + c_2 \sin\left(2\sqrt{2}x\right)$$

بزار راحتت کنم : هر جا دلتا منفی شد مثل وقتی حلش کن که دلتا مثبت هستش فقط اون منفی رو خودش رو بکن بدونه رادیکال و بدون که i میشه ، و آخرش هم که از روی الگوی $a + bi$ دوتا مقدارِ a و b رو گیر بیار.

خب میرسیم به حل معادلات مرتبه دوم ناهمگن که همین اول بهت بگم، برای حل ناهمگن ها، اول باید به صورت همگن حلش کنی، یعنی سمت راست رو صفر میزاری و حل میکنی.

جواب آخر معادله میشه، جواب همگن + جوابی که از ناهمگن گیر میاری، یعنی اینجوری :

$$Y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \text{جواب ناهمگن}$$

معادلات ناهمگن | ضرایب لاگرانژ (تغییر پارامتر)

خب جواب کلی این شکلی از آب درمیاد همیشه : $Y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + v_1y_1 + v_2y_2$

خب حالا 'V' ها چین؟!

$$V_1 = \int \frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx \quad , \quad V_2 = \int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

منظور از W همون رونسکین هستش که برات نوشتم چیه

R(x) چیه؟ همون سمت راست معادله که ناهمگنش کرده دیگه

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2" \end{vmatrix} \rightarrow \quad y_1y_2' - y_2y_1'$$ دترمینان

مثلا) این معادله $y" + y = \csc(x)$ رو با خودکارت لیس بزن.

حل)

اول به صورت همگن $y" + y = 0 \quad \rightarrow \quad m^2 + 1 \quad - Delta \rightarrow \quad m = \pm i \quad \rightarrow \quad y_1 = \cos x\,, \qquad y_2 = \sin x$

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad R(x) = \csc x = 1/\sin x$$

$$V_1 = \int \frac{-y_2R(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{-\sin x \times \frac{1}{\sin x}}{1}dx = -x \quad , \quad V_2 = \int \frac{y_1R(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{\cos x \times \frac{1}{\sin x}}{1}dx = \ln \sin x$$

$$Y(x) = c_1y_1 + c_2y_2 + V_1y_1 + V_2y_2 = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

معادلات ناهمگن | ضرایب نامعین

اینجا سه مدل R(x) داریم (همون طرف راست معادله) که هر شکلی بودن، یه y فرضی شبیه خودشون درست میکنی، آخرش همون y رو پیدا میکنی و تامام تامام...

انقدر ساده است که فقط کافیه مثال هارو دنبال کنی، قراره دو طرف رو مساوی بزاریم...

- اگه دیدی $R(x) = e^{ax}$ اینو در نظر بگیر $y = Ae^{ax}$

مثلا) معادله $y" - 3y' + 2y = 3e^{3x}$ رو حل کن.

حل)

اول به صورت همگن $y" - 3y' + 2y = 0 \quad - Delta \rightarrow \quad y_1 = e^x \;,\; y_2 = e^{2x}$

حالا می‌سازیم $y = Ae^{3x} \;\rightarrow\; y' = 3Ae^{3x} \;\rightarrow\; y" = 9Ae^{3x}$

بازسازی $\rightarrow \quad 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} + 2Ae^{3x} \;\rightarrow\; 2Ae^{3x} = 3e^{3x} \;\rightarrow\; A = \frac{3}{2}$

پس $y_p = \frac{3}{2}e^{3x} \quad , \quad Y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{3}{2}e^{3x}$

● اگه دیدی $R(x) = \sin(bx)$ اینو در نظر بگیر $y = A\cos(bx) + B\sin(bx)$

مثلا) معادله $y'' - 3y' + 2y = 3\sin(2x)$ رو حل کن.

حل)

$y'' - 3y' + 2y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$ اول به صورت همگن =>

حالا می سازیم =>

$y = A\cos(2x) + B\sin(2x) \rightarrow y' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) \rightarrow$

$y'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

بازسازی => $-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + 6A\sin(2x) - 6B\cos(2x) + 2A\cos(2x) + 2B\sin(2x) = 3\sin 2x$

$(-4A - 6B + 2A)\cos(2x) + (-4B + 6A + 2B)\sin(2x) = 3\sin(2x)$

$\begin{cases} -2A - 6B = 0 \\ 6A - 2B = 3 \end{cases}$

چون طرف راست cos نداریم پس ضریبش صفره ←

برای sin هم ←

با حل دو معادله دو مجهول => $A = \frac{9}{20}$ و $B = -\frac{3}{20}$

$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{9}{20}\cos(2x) - \frac{3}{20}\sin(2x)$

امتحان وسیله ست، نمره دست استاده 😂

حواست باشه اینجوری هم فرض بگیری همون جواب درمیاد $y = B\cos(bx) + A\sin(bx)$

● اگه دیدی $R(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ اینو در نظر بگیر $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$

اینو تا بزرگترین توانی که می‌بینی بساز، برای اینکه بگیری چی میگم، مثال پایینو ببین...

مثلا) معادله $y'' - 3y' + 2y = 4x^3 - 2x + 1$ رو حل کن.

حل)

$y'' - 3y' + 2y \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$ اول به صورت همگن =>

حالا می سازیم ←

$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \rightarrow y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$

$y'' = 6Ax + 2B$

بازسازی => $6Ax + 2B - 9Ax^2 - 6Bx - 3C + 2Ax^3 + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = 4x^3 - 2x + 1$

$(2A)x^3 + (-9A + 2B)x^2 + (6A - 6B + 2C)x + (2B - 3C + 2D) = 4x^3 - 2x + 1$

ضریب هارو مساوی می زاریم =>

$2A = 4 \rightarrow \boxed{A = 2}$

$-9A + 2B = 0 \rightarrow \boxed{B = 9}$

$6A - 6B + 2C = -2 \rightarrow \boxed{C = 20}$

$2B - 3C + 2D = 1 \rightarrow D = \frac{43}{2} = 21.5$

پس => $y_p = 2x^3 + 9x^2 + 20x + \frac{43}{2}$

$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + 2x^3 + 9x^2 + 20x + \frac{43}{2}$

به این سوال نگاه میکنم 😐

معادلات ناهمگن | عملگری

اولا اینجا ما به جای مشتق، عملگرش رو مینویسیم مثل بخش "ضرایب ثابت "که یادت بیاد جای مشتق m میذاشتیم، حالا D میذاریم، فرقی نداره که...

بعد y رو تنها میکنیم و باید چند تا بسط تیلور رو حفظ باشی :

معادلات این شکلی میشن دیگه $D^n y = R(x)$

که اگه y رو تنها کنیم $\frac{1}{D_n} R(x) = y$

حالت های مختلفی که میتونی اینو حل کنی رو بررسی میکنیم :

$$\frac{1}{1+D^2} = 1 - D^2 + D^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1-D^2} = 1 - D^2 + D^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{1-D} = 1 + D + D^2 + D^3 + \cdots$$

- **اگه R(x) چند جمله ای معمولی باشه)**

خب بسط تیلور تا زمانی که به توانش برسیم ادامه میدیم بعد عملگر رو لحاظ میکنیم(یعنی مشتق میگیریم)

مثلا) معادله $y'' + 4y = x^3 + 3x - 1$ رو تا داغه حل کن.

حل)

اول به صورت همگن =>

$$y'' + 4y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = \cos(2x) \text{ و } y_2 = \sin(2x)$$

$$(D^2+4)y = x^3 + 3x - 1 \longrightarrow \frac{1}{(D^2+4)}(x^3+3x-1) = y$$

$$\frac{1}{D^2+4} = \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{(\frac{D^2}{4}+1)}}$$

چون برای تیلور باید به اضافه یک شده باشه.

$$\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{D^2}{4}+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{D^2}{4} + \frac{D^4}{16}\right]$$

این بسط تیلوره تا نزدیک بیشترین توان چندجمله ای (توان ۳ x)

$$\frac{1}{4}\underbrace{\left[x^3 + 3x - 1 - \frac{3x}{2}\right]} = y \longrightarrow y = \frac{x^3}{4} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}$$

بسط تیلور رو توی R(x) لحاظ کردیم (مشتق گرفتیم)

$$y(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x) + \frac{x^3}{4} + \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}$$

- **اگه $R(x) = e^{ax}$ باشه)**

اگه a مخرج رو صفر نکنه، میتونی بزاریش جای D و تموم ...

مثلا) معادله $y'' - 2y' + 5y = e^{-x}$ رو حل کن.

حل)

اول به صورت همگن => $y'' - 2y' + 5y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^{x}\cos(2x)$ و $y_2 = e^{x}\sin(2x)$

$(D^2 - 2D + 5)y = e^{-x} \rightarrow \frac{1}{D^2 - 2D + 5} e^{-x} = y \rightarrow \frac{1}{(-1)^2 - 2(-1) + 5} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{8} = y_p$

$y(x) = c_1 e^{x}\cos(2x) + c_2 e^{x}\sin(2x) + \frac{e^{-x}}{8}$

• اگه $"R(x) = b\cos(ax)"$ یا $"R(x) = b\sin(ax)"$)

سه حالت وجود داره :

حالت اول) اگه عملگر هات همه شون D^2 و عدد باشن و $-a^2$ رو بزاری جاشون مخرج رو صفر نکنه، پس $-a^2$ رو جای D^2 ها بزار (یه وقت جای D نزاری، سوتی ندی اکسم 🤣)

مثلا) معادله $y'' + 4y = \cos x$ رو حل کن.

حل)

اول به صورت همگن $\quad y'' + 4y = 0 \ \rightarrow \ y_1 = \cos 2x \ , \ y_2 = \sin 2x$

$$(D^2 + 4)y = \cos x \rightarrow \frac{1}{D^2 + 4}\cos x = y \rightarrow \frac{1}{(-1)^2 + 4}\cos x = \frac{\cos x}{3} = y_p$$

$$Y(x)c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{\cos x}{3}$$

حالت دوم) اگه عملگر هات همه شون D^2 و عدد باشن و $-a^2$ رو بزاری جاشون مخرج رو صفر کنه، این حرکت رو میزنی :

$$\frac{1}{D^2 + a^2}\cos(ax) = \frac{x}{2a}\sin(ax)$$

$$\frac{1}{D^2 + a^2}\sin(ax) = -\frac{x}{2a}\cos(ax)$$

مثلا) اینو یه نگاهی بنداز $y'' + 9y = \cos(3x)$

اول به صورت همگن => $y'' + 9y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = \cos(3x)$ و $y_2 = \sin(3x)$

$(D^2 + 9)y = \cos(3x) \rightarrow \frac{1}{D^2 + 9}\cos(3x) = y \longrightarrow$ اگه $-a^2$ رو جای D^2 بزارم مخرج صفر میشه

ح۲ => $\frac{1}{D^2 + 3^2}(\cos(3x)) = \frac{x}{6}\sin(3x)$

$y(x) = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{x}{6}\sin(3x)$

حالت سوم) اگه اصلا تابعی از D^2 نباشه (مثلا داخلش D هم داشته باشه)

تابع سینوس یا کسینوس رو به **حالت اویلر** تبدیلش میکنیم و مثل حالتی که $R(x) = e^{ax}$ حلش میکنیم.

مثلا) **اینو داشته باش** $y'' - 3y' + 2y = 3\sin 2x$

اول به صورت همگن => $y'' - 3y' + 2y = 0 \xrightarrow{\Delta} y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$

$$(D^2 - 3D + 2)y = 3\sin 2x \longrightarrow \frac{1}{D^2 - 3D + 2}(3\sin 2x) = y$$

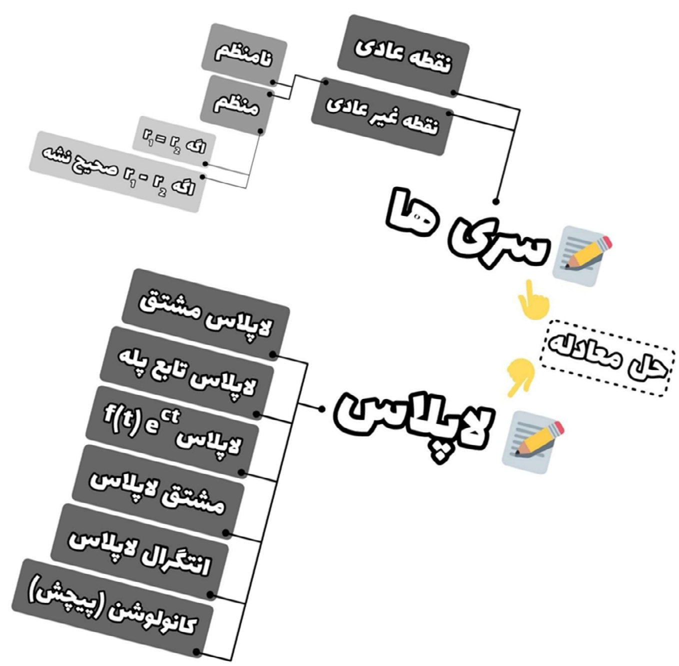
چون این سینوس عددش رو در تابعی می‌ذاریم که تابعی از D^2 نیست یعنی وجود نداره، پس ما قسمت مجازی‌شو می‌خوایم ← $\sin 2x = e^{2ix}$

$$\frac{3}{D^2 - 3D + 2}e^{2ix} = \frac{3}{(2i)^2 - 3(2i) + 2}e^{2ix} = \frac{3}{-2-6i}e^{2ix} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{گویا کردن}} -\frac{3(1-3i)}{20}e^{2ix}$$

$$= \frac{-3}{20}(1-3i)\underbrace{(\cos 2x + i\sin 2x)}_{e^{2ix}\ \text{همون}} = \frac{-3}{20}\left((\cos 2x + 3\sin 2x) + i(\sin 2x - 3\cos 2x)\right)$$

$$\text{قسمت مجازی} \Rightarrow \frac{3}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$$

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$$



ادامه اش پایینه

اگه می‌خوای بقیه جزوه‌ها رو داشته باشی، یکی از گزینه‌های

زیر رو لمس کن 😀 👇 📚 !